解説 負の二項分布のモーメント母関数の導出

ここでは負の二項分布 $NB(r, p)$ のモーメント母関数（moment generating function）の求め方について解説していこう。まずは負の二項分布の特殊な場合である幾何分布 $Ge(p)$ の意味から確認しておきたい。（実は $NB(1, p)$ は $Ge(p)$ に等しい）幾何分布とはファーストサクセス分布（first success）とも呼ばれる。つまり確率 p で成功する試行が初めて成功するまでに失敗する回数の分布であった。（念のため断っておくが、実は幾何分布には二通りの定義があり、失敗の回数を X とする流儀と、合計の試行回数を X とする流儀がある。ここでは失敗の回数を X とする流儀を採用する）この定義を元に幾何分布 $Ge(p)$ に従う確率変数 X の確率質量関数を求めよう。$Pr(X = k)$ は k 回失敗をしたあとに初めて成功する確率を表している。失敗の確率はもちろん $1 - p$ であるから $Pr(X = k) = (1-p)^k p(k = 0, 1, 2...)$ となる。次にこの幾何分布 $Ge(p)$ に従う確率変数 X のモーメント母関数 $M_X(t)$ を求めておこう。$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k pe^{tk} = \sum_{k=0}^{\infty}((1-p)e^t)^k p$ となる。ここで初項 p、公比 $(1-p)e^t$ の等比数列の和と見なすと $M_X(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^t}$ と求めることができる。

次に負の二項分布のモーメント母関数について、まずはその定義から復習しよう。幾何分布では、はじめて成功するまでに失敗する回数であったのに対して、負の二項分布 $NB(r, p)$ では r 回成功するまでに失敗する回数を X とする。確率質量関数 $Pr(X = k)$ の計算方法は次の通り。成功は r 回、失敗 k 回である。また最後は必ず成功で終わらなければいけないので（r 回目の成功が現れるまでに失敗する回数であるから）、最後の成功を除いた $r + k - 1$ 回の試行の並び方は自由である。そのため $r + k - 1$ の試行のうち成功 $r - 1$ 回、失敗 k 回の並び方は ${}_{r+k-1}C_k$ 通りである。よって $Pr(X = k) = {}_{r+k-1}C_k p^r(1-p)^k = \dfrac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!}p^r(1-p)^k$ となる。

さて次に負の二項分布のモーメント母関数を求めよう。もちろん確率質量関数から求めることもできるが多少テクニカルな変形を要するためここではもう少し覚えやすい計算しやすい方法を採用する。（Combination の中に負の数が現れる。それゆえ負の二項分布とも呼ばれるそうだ。）負の二項分布には再生性と呼ばれる性質があり X, Y を負の二項分布（幾何分布）に従う独立な確率変数とするとき、$X + Y$ もまた負の二項分布となる。X，Y が独立で X が $NB(r, p)$，Y が $NB(s, p)$ にそれぞれ従うとき、$X + Y$ は $NB(r + s, p)$ に従う。これは意味を考えれば実に単純な話である。X は r 回成功するまでに失敗した回数で、Y はそれとは別に再び s 回成功するまでに失敗した回数である。（ただし X と Y の試行では成功率は等しい）つまり $X + Y$ を一纏めにすれば $r + s$ 回成功するまでに失敗した回数になるのは当たり前の話である。だから $X + Y$ は $NB(r + s, p)$ に従う。このことを利用してモーメント母関数を求める。いま $G_1, G_2, ..., G_r$ を r 個の独立な $Ge(p) = NB(1, p)$ に従う確率変数とする。このとき $G_1 + G_2 + ... + G_r$ は $NB(r, p)$ に従うことがわかる。G_1 は 1 回目の成功までに失敗する回数、G_2 はさらにもう 1 回成功するまでに新たに失敗する回数.... とすれば $G_1 + G_2 + ... + G_r$ は r 回成功するまでに失敗する回数を表すことがわかる。これはもはや $NB(r, p)$ の定義に等しい。よって X を $NB(r, p)$ に従う確率変数とすると $X = G_1 + G_2 + ... + G_r$ という関係が成り立つから $E[e^{tX}] = E[e^{t(G_1+G_2+...G_r)}] = E[e^{tG_1}e^{tG_2}...e^{tG_r}] = E[e^{tG_1}]E[e^{tG_2}]...E[e^{tG_r}] = M_{G_1}(t)M_{G_2}(t)...M_{G_r}(t)$ となる。（すべて独立であるから期待値も別々に計算した期待値をかけ合わせることで求められる）また $G_1, G_2, ..., G_r$ は独立で同じ分布に従うからそれぞれのモーメント母関

数 $M_{G_1}(t)=M_{G_2}(t)...=M_{G_r}(t)$ はすべて $\dfrac{p}{1-(1-p)e^t}$ に等しくなるはずである。よってそれらを r 乗すればよいので $\dfrac{p^r}{(1-(1-p)e^t)^r}$ となる。